



**Zur empirischen Evidenz der Cobb-Douglas  
Technologie in gesamtdeutschen Zeitreihen**

*Christian Dreger, Christian Schumacher*

März 2000

Nr. 113

**Diskussionspapiere**  
*Discussion Papers*

## Abstract

Wir untersuchen, ob eine Produktionsfunktion vom Cobb-Douglas Typ mit den Faktoren Arbeit und Kapital für Deutschland gerechtfertigt werden kann. Bis einschließlich 1990 werden westdeutsche, danach gesamtdeutsche Datenreihen verwendet. Der dadurch auftretende Strukturbruch wird bei den Tests auf Integration und Kointegration berücksichtigt. Auf dieser Basis läßt sich ein Fehlerkorrekturmodell ableiten, das einer Cobb-Douglas Funktion mit konstanten Skalenerträgen im wesentlichen entspricht.

## 1 Einleitung

Bei der theoretischen Fundierung makroökonomischer Modelle spielt die Spezifikation des Angebots- bzw. Produktionsbereichs eine ganz erhebliche Rolle. Bei Modellen des Keynes-Klein-Typs wird die Produktion ausschließlich durch die Nachfrage determiniert. In der Regel wird das Güterangebot nicht spezifiziert. Damit ist der Erklärungsgehalt solcher Modelle jedoch auf relativ kurze Zeithorizonte beschränkt. Darüber hinaus kann die explizite Berücksichtigung des Produktionsbereichs die Erklärung der Faktornachfragefunktionen aus theoretischer Sicht verbessern. Schließlich erlaubt eine endogene Angebotsseite auch die Bestimmung der Kapazitätsauslastung aus dem Modellkontext heraus.

Damit ist die Spezifikation einer Produktionsfunktion ein zentrales Anliegen makroökonomischer Modelle. Innerhalb der Klasse der substitutionalen Produktionsfunktionen lassen sich verschiedene Spezifikationen des makroökonomischen Produktionsapparats diskutieren. Sie unterscheiden sich hinsichtlich der Restriktionen, die den Substitutionsbeziehungen zwischen den Faktoren auferlegt werden. Dies ist am Parameter der Substitutionselastizität ablesbar, der die prozentuale Änderung des Faktoreinsatzverhältnisses bei einer Variation der relativen Faktorpreise mißt. Bei Verwendung einer Cobb-Douglas Funktion wird die Substitutionselastizität auf den Wert 1 gesetzt, so daß das Faktoreinsatzverhältnis äquiproportional auf eine Veränderung der relativen Faktorpreise reagiert. Unter dieser Voraussetzung wird die Verteilung des Einkommens auf die an der Produktion beteiligten Faktoren nicht beeinflusst. Dagegen unterstellt die CES-Funktion zwar auch eine konstante Substitutionselastizität. Sie ist jedoch nicht mehr notwendig gleich 1 und muß empirisch bestimmt werden. Die Annahme einer konstanten Substitutionselastizität wird schließlich aufgehoben, sofern eine Translog-Spezifikation verwendet wird. Darüber hinaus erlaubt dieser Ansatz partielle substitutionale oder komplementäre Beziehungen zwischen mehreren Inputfaktoren.

Theoretisch ist zunächst eine möglichst allgemeine Spezifikation des Produktionsapparats anzustreben, die gegebenenfalls nach ihrer Schätzung mit Hilfe statistischer Tests

schrittweise konkretisiert wird. Allerdings sind einer solchen Analyse empirisch enge Grenzen gesetzt. Insbesondere bei einer Translog-Funktion hat man aufgrund der Vielzahl der Einflußgrößen nur wenig Freiheitsgrade. Außerdem entsteht ein Multikollinearitätsproblem, so daß die Parameter der zugrunde liegenden Produktionstechnologie eher mit zu breiten Konfidenzintervallen ermittelt werden. Aber auch eine Schätzung des CES-Zusammenhangs ist wegen der benötigten nichtlinearen Schätzverfahren problematisch. Die Lösung wird auf einem iterativen Weg bestimmt, so daß die Schätzergebnisse von den Startwerten abhängig sein können. Daher wird im folgenden lediglich die Cobb-Douglas Funktion genauer betrachtet. Die Validität der in diesem Fall geltenden Restriktionen läßt sich im Anschluß an die Schätzung beurteilen.

Der Rest dieses Beitrags gliedert sich wie folgt. In den nächsten beiden Abschnitten werden die allgemeinen Eigenschaften einer Cobb-Douglas Funktion rekapituliert und einige Schätzprobleme thematisiert. Anschließend werden die Datenbasis und die verwendeten Methoden beschrieben. Letztlich erfolgt die Schätzung des langfristigen Zusammenhangs auf der Basis der Produktionsfunktion im Rahmen einer Kointegrationsanalyse, welche mit verschiedenen Methoden durchgeführt wird. Der Beitrag endet mit einer Zusammenfassung der wesentlichen Ergebnisse.

## 2 Produktionstheoretische Grundlagen

Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion berücksichtigt in ihrer einfachsten Form nur zwei Inputs. Der Zusammenhang zwischen den Faktoren Arbeit  $L$  und Kapital  $K$  und der Produktion  $Y$  im Zeitpunkt  $t$  ist durch

$$(1) \quad Y_t = L_t^\alpha K_t^\beta$$

gegeben. Die Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  sind positiv und kleiner als 1. Sie geben die konstanten Produktionselastizitäten der Faktoren an, was sich durch logarithmische Differentiation der Gleichung zeigen läßt. Die Produktionselastizitäten messen die prozentuale Reaktion des Outputs, die bei einer autonomen, einprozentigen Variation des jeweiligen Faktorinputs zu erwarten ist. Die Grenzprodukte der Faktoren sind durch

$$(2) \quad \partial Y / \partial L = \alpha Y / L \quad \text{und} \quad \partial Y / \partial K = \beta Y / K$$

bestimmt. Sie sind positiv und nehmen mit wachsenden Faktoreinsätzen ab, so daß die Ertragskurven für die Faktoren konkav verlaufen. Die Grenzprodukte einer Cobb-Douglas-Funktion werden aus den Durchschnittsproduktivitäten berechnet, indem letztere mit den konstanten Produktionselastizitäten multipliziert werden. Das Verhältnis der Grenzprodukte beschreibt die Grenzrate der Substitution RTS zwischen den Faktoren

$$(3) \quad \text{RTS} = \frac{\partial Y / \partial K}{\partial Y / \partial L} = \frac{\beta L}{\alpha K},$$

die lediglich mit dem gewählten Faktoreinsatzverhältnis variiert. Auf der Grundlage dieser Beziehung läßt sich die Substitutionselastizität  $\sigma$  bestimmen. Sie ist als relative Anpassung des Faktoreinsatzverhältnisses definiert, die sich bei einer einprozentigen Änderung der Grenzrate der Substitution ergibt. Nach logarithmischer Differentiation hat man

$$(4) \quad \sigma = \frac{d \log(L/K)}{d \log \text{RTS}} = 1,$$

so daß die Substitutionselastizität unabhängig vom realisierten Faktoreinsatzverhältnis und konstant gleich 1 ist. Bei einer Entlohnung der Faktoren nach ihrem Grenzprodukt entspricht die Grenzrate der Substitution dem umgekehrten Verhältnis der Faktorpreise. Aus (4) folgt dann, daß das Faktoreinsatzverhältnis äquiproportional auf eine Veränderung der relativen Faktorpreise reagiert, so daß die Verteilung des Einkommens auf die Faktoren unverändert bleibt.

Ein weiterer Parameter der Produktionsfunktion ist die Skalenelastizität. Sie ist auf den Zusammenhang zwischen einer gleich großen relativen Änderung aller Faktoreinsatzmengen und der relativen Änderung der Produktion gerichtet. Wächst der Output in genau dem gleichen prozentualen Ausmaß wie alle Faktoreinsätze, liegen konstante Skalenerträge vor, so daß die Produktionsfunktion linear homogen ist. In diesem Fall kann eine gegebene Produktion bei gleicher Technologie dupliziert werden, wenn man die Einsatzmengen der Faktoren verdoppelt. Die Bedingung der linearen Homogenität ist bei einer Cobb-Douglas-Funktion genau dann erfüllt, wenn sich die Produktionselastizitäten zu 1 addieren. Sofern die Faktoren außerdem nach ihren Grenzprodukten entlohnt werden, verteilt sich die gesamte Produktion vollständig auf die beteiligten Inputs (Euler'sches Theorem). Die Produktionselastizitäten geben dabei die konstanten Einkommensanteile der Faktoren an.

Eine ergänzende Interpretation der Skalenelastizität der Produktion ergibt sich auf der Grundlage der dazugehörigen, dualen Kostenfunktion. Tatsächlich entspricht die Elastizität der Gesamtkosten  $C$  der Produktion in bezug auf den Output dem inversen Wert der Skalenelastizität (Varian, 1997). Aus der Darstellung der Kostenelastizität

$$(5) \quad \frac{\partial \log C}{\partial \log Y} = \frac{\partial C}{\partial Y} \frac{Y}{C} = \frac{MC}{AC}$$

ist erkennbar, das im Fall konstanter Skalenerträge die Grenzkosten MC den Durchschnittskosten AC entsprechen. Danach setzen steigende Skalenerträge eine Dominanz der Durchschnitts- über die Grenzkosten voraus. Dies dürfte vor allem dann von Bedeutung sein, wenn die Entwicklung und Einführung neuer Verfahren oder Techniken mit hohen Anlaufkosten verbunden ist (Romer, 1990). Die Regel der vollkommenen Konkurrenz, nach der die Absatzpreise der Unternehmen den Grenzkosten entsprechen, wäre in diesem Fall mit dauerhaften Verlusten verbunden. Daher übersteigen die Preise im gesamten Outputbereich die Grenzkosten, so daß steigende Skalenerträge wirksam sind.<sup>1</sup> Diese würden für sich genommen auf unvollkommenen Wettbewerb und infolge sinkender Stückkosten beziehungsweise wachsender Stückgewinne auf Monopolisierungstendenzen deuten.

Die Produktionsfunktion kann um den Einfluß des technischen Fortschritts ergänzt werden. Technologische Entwicklungen können dazu führen, daß sich die Nutzung eines Faktors bei gegebenem Output reduziert oder vermehrt oder unverändert bleibt. So liegt z.B. arbeitssparender technischer Fortschritt vor, wenn eine gegebene Outputmenge im Zeitablauf mit einem fortwährend geringeren Einsatz an physischer Arbeit produzierbar ist. Die Produktionsfunktion läßt sich in diesem Fall durch

$$(6) \quad Y_t = (A_t L_t)^\alpha K_t^\beta$$

schreiben, wobei  $A_t$  für den technischen Fortschritt steht und  $A_t L_t$  als Arbeitsmenge in Effizienzeinheiten interpretierbar ist. Da sich die Variable  $A_t$  jedoch einer direkten Beobachtung entzieht, wird der technische Fortschritt in der empirisch orientierten Literatur meist exogen als exponentieller deterministischer Trend modelliert.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Zumindest auf der einzelbetrieblichen, aber auch auf der sektoralen Ebene sind steigende Skalenerträge der Produktion nicht außergewöhnlich. So dürfte etwa die Herstellung einer weiteren Kopie eines Softwarepakets nur sehr geringe Grenzkosten verursachen, die unter den Absatzpreisen liegen. Damit werden letztlich auch die Entwicklungskosten für das Softwarepaket berücksichtigt, die bei der Grenzkostenbetrachtung keine Rolle spielen. Ob und inwieweit der Fall steigender Skalenerträge auch auf der gesamtwirtschaftlichen Ebene relevant ist, läßt sich empirisch anhand von Produktions- oder Kostenfunktionen beurteilen. Eine ergänzende Testmöglichkeit fußt auf der Beziehung zwischen Absatzpreisen und Grenzkosten. Danach legen die Unternehmen ihre Preise als Aufschlag auf die Grenzkosten fest. Sofern der mark-up Parameter den Wert 1 signifikant übersteigt, sind steigende Skalenerträge wirksam.

<sup>2</sup> Die neoklassische Wachstumstheorie verlangt, daß bei Verwendung einer Cobb-Douglas-Funktion der technische Fortschritt immer arbeitssparend ist, damit ein Steady-state existiert (Barro, R. J., Sala-i-Martin, X., 1995).

Des Weiteren kann auf der Basis einer Schätzung der Cobb-Douglas Funktion nicht zwischen den verschiedenen Formen des technischen Fortschritts diskriminiert werden. Durch die Bildung von Logarithmen wird der Produktionszusammenhang (6) linearisiert, so daß die üblichen Schätzmethoden anwendbar sind. Die möglichen Ausprägungen des technischen Fortschritts, der in dieser Spezifikation einem linearen Trend folgt, sind dann jedoch nicht mehr gegeneinander identifizierbar.

### 3 Alternative Spezifikationen

Die Cobb-Douglas Funktion kann empirisch auf der Grundlage verschiedener Spezifikationen überprüft werden. Eine direkte Strategie besteht zunächst darin, von Gleichung (6) auszugehen. Wird logarithmiert, erhält man die Beziehung

$$(7) \quad \log Y_t = \mu + \gamma \cdot t + \alpha \log L_t + \beta \log K_t + \varepsilon_t$$

in der  $\varepsilon_t$  ein stationärer Störterm ist. Diese Gleichung liefert Schätzwerte für die Produktionselastizitäten, so daß auch der Wert der Skalanelastizität getestet werden kann. Ferner gibt der Parameter  $\gamma$  die konstante Wachstumsrate des nicht näher identifizierten technischen Fortschritts pro Zeitperiode an. Bei dieser Interpretation ist allerdings zu berücksichtigen, daß letztlich ein linearer Trend in den Residuen aufgefangen wird, der ansonsten nach Abzug der übrigen Einflußfaktoren noch vorhanden wäre. Ob und inwieweit dieser Trendverlauf tatsächlich dem technischen Fortschritt oder einer Fehlspezifikation des Modells geschuldet ist, bleibt in der empirischen Analyse unklar.

Darüber hinaus besteht in (7) ein Simultanitätsproblem, da die Faktormengen nicht unabhängig vom realisierten Output gewählt werden. Daher sind die Einsätze an Arbeit und Kapital mutmaßlich endogen, so daß die Parameter inkonsistent geschätzt werden. Außerdem werden die Faktoren kaum unabhängig voneinander eingesetzt. Damit ergibt sich zusätzlich ein Multikollinearitätsproblem.

Zwar können die ökonometrischen Probleme im Rahmen stärker restringierter Spezifikationen durchaus reduziert werden (Intriligator, Bodkin, Hsiao, 1995). So besteht z.B. eine mögliche Variante darin, die Produktionsfunktion in intensiver Form, also in Pro-Kopf-Größen zu schreiben. In diesem Ansatz wird die Arbeitsproduktivität durch die Kapitalintensität erklärt. Damit wird das Multikollinearitätsproblem vermindert. Die Simultanität bleibt jedoch erhalten. Darüber hinaus setzt die Spezifikation konstante Skalenerträge der Produktion voraus, so daß die Menge der testbaren Hypothesen schrumpft. Entsprechend wird auch die Aussagekraft der noch verfügbaren Tests eingeschränkt. So ist ein Scheitern der intensiven Form noch keine eindeutige Evidenz gegen die Cobb-Douglas-Technologie, weil die ungeprüfte Bedingung konstanter Skalenerträge empirisch nicht valide sein mag.

Anstelle einer direkten Schätzung des makroökonomischen Produktionsapparats können die interessierenden Parameter gemäß dem Dualitätstheorem auch auf indirektem Weg aus der Kostenfunktion abgeleitet werden. Werden die Kosten bei gegebenem Outputniveau minimiert, erhält man eine Funktion des Cobb-Douglas Typs, welche die Stückkosten der Produktion durch die Faktorpreise erklärt (Hansen, 1993). Das Endogenitätsproblem wird in dieser Spezifikation überwunden, sofern die Faktorpreise für die Unternehmen nicht beeinflussbar sind.

Weil die Erklärungsvariablen für die Stückkosten exogen fixiert sind, ist die Kostenfunktion ökonometrisch einfacher zu bestimmen als die Produktionsfunktion. Dabei werden allerdings eine Kostenelastizität von 1 beziehungsweise konstante Skalenerträge unterstellt.<sup>3</sup> Insofern wird die Vermeidung endogener Regressoren mit einer restriktiveren Spezifikation erkaufte.

Darüber hinaus setzt eine Analyse auf der Basis der Kostenfunktion zusätzlich Informationen über die Faktorpreise voraus. Diese Größen sind jedoch nicht vollständig beobachtbar und müssen daher approximiert werden. So ist in den berichteten Arbeitskosten nur der Preis für unselbständige Arbeit, nicht aber das Entgelt für unternehmerische Tätigkeit enthalten. Die Kapitalkosten werden von Größen beeinflusst, deren Wirkungen nur schwer abschätzbar sind. Hierzu zählen z.B. politische Maßnahmen der Investitionsförderung und die Erwartungen der Unternehmen hinsichtlich der künftigen Marktentwicklung. Aufgrund der nur unscharfen Messung der Variablen bietet die Kostenfunktion insgesamt keinen echten Vorteil gegenüber einer direkten Schätzung der Produktionsfunktion.

Die Analyse der Produktions- oder Kostenfunktion bietet selbst keine empirische Evidenz, um die Annahme hinsichtlich der Substitutionselastizität zu prüfen. Ein Test dieses Parameters macht ein Ausweichen auf die bedingten Faktornachfragen erforderlich, welche die Cobb-Douglas Funktion impliziert. Die Nachfragen sind bei einer Entlohnung der Faktoren nach ihrem Grenzprodukt und gewinnmaximierendem Verhalten der Unternehmen aus den Bedingungen erster Ordnung ableitbar.<sup>4</sup> Sie lassen sich allgemein

---

<sup>3</sup> Der Wechsel von den Gesamtkosten zu den Stückkosten macht die Annahme konstanter Skalenerträge erforderlich. Denn bei einer Kostenelastizität ungleich 1 reagieren die Gesamtkosten nicht äquiproportional auf Änderungen der Produktion. Die Elastizität ist vielmehr empirisch zu bestimmen, so daß der Output als Regressor fungiert und die Endogenität erhalten bleibt.

<sup>4</sup> Bei der Herleitung der Nachfragefunktionen wird für das repräsentative Unternehmen die Prämisse der Gewinnmaximierung gesetzt. Darüber hinaus ist der Output für das Unternehmen gegeben. Da die Nachfragefunktionen unter dieser Restriktion gelten, handelt es sich um bedingte Nachfragefunktionen (Hicks'sche Nachfragefunktionen). Aus den bedingten Faktornachfragen resultieren die unbedingten Nachfragefunktionen (Marshall'sche Nachfragefunktionen), wenn die Annahme eines gegebenen Outputs aufgehoben wird. In dieser Spezifikation wird der Faktoreinsatz nur noch durch die relativen Faktorpreise erklärt.

als Funktionen des Outputs und der eigenen Faktorpreise schreiben. Bei Geltung des postulierten Produktionszusammenhangs ist die Elastizität der Faktornachfragen in bezug auf den Output gleich 1. Die Elastizität in bezug auf den eigenen Faktorpreis ist gleich  $-1$  und entspricht betragsmäßig der Substitutionselastizität. Signifikante Abweichungen von diesem Wert würden dagegen für eine komplexere Produktionstechnologie sprechen.<sup>5</sup>

Allerdings ist auch bei der empirischen Auswertung der bedingten Faktornachfragen ein Endogenitätsproblem relevant, weil der Output eine der Erklärungsgrößen ist. Ferner sind die Meßprobleme bezüglich der Faktorpreise von Bedeutung, die auch bei der Analyse der Kostenfunktion, nicht aber bei der Produktionsfunktion anfallen.

Insgesamt erfolgt die Schätzung der Technologie unter recht unsicheren Bedingungen, so daß kein Verfahren eindeutig die Oberhand besitzt. In dieser Untersuchung wird eine direkte Schätzung der Produktionsfunktion bevorzugt. Diese Beziehung wird dabei als langfristig geltendes Gleichgewicht interpretiert, so daß die Technik kointegrierter Prozesse verwendet wird.

#### **4 Datenbasis und Methode**

In die Produktionsfunktion gehen die tatsächlich abgegebenen Faktorleistungen pro Zeitperiode ein. Dies ist für den Faktor Arbeit relativ unproblematisch, weil das tatsächlich geleistete Arbeitsvolumen beobachtbar ist. Anders ist die Situation beim Kapitalstock zu beurteilen. Der tatsächlich genutzte Kapitalbestand läßt sich definieren, indem der Kapitalbestand der amtlichen Statistik mit einer Kapazitätsauslastung multipliziert wird. Die Auslastung resultiert ihrerseits aus dem Verhältnis zwischen tatsächlichem und potentiellm Output, der bei einer normalen Beschäftigung der Faktoren erzeugt wird. Abgesehen von dem generellen Problem, eine normale Nutzung der Faktoren festzulegen, kann der Potentialoutput und so auch die Kapazitätsauslastung nur auf der Basis einer bereits geschätzten Gleichung ermittelt werden. Ein möglicher Ausweg besteht darin, den Auslastungsgrad exogen zu fixieren. Dabei kann der Index des ifo-Instituts verwendet werden. Dieser bezieht sich jedoch allein auf das Verarbeitende Gewerbe und unterschlägt damit den im Strukturwandel immer wichtiger werdenden Dienstleistungssektor.

In der empirischen Analyse wird der Output durch das reale Bruttowertschöpfung ohne Wohnungsvermietung erfaßt. Der Faktor Arbeit wird mit dem Arbeitsvolumen abgebildet, das die geleistete Arbeit der abhängig Beschäftigten und der Selbständigen ohne den öffentlichen Sektor umfaßt. Das Arbeitsvolumen ist in der Dimension Mrd. Stunden pro

---

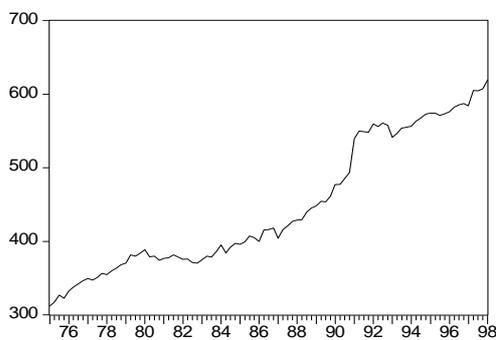
<sup>5</sup> Dagegen liegt eine CES-Funktion vor, wenn die Elastizität der Faktornachfrage in bezug auf den Output gleich 1 und die Elastizität in bezug auf den Faktorpreis ungleich  $-1$  ist. Der Ansatz über die bedingten Faktornachfragen kann daher zwischen unterschiedlichen Produktionstechnologien diskriminieren.

Periode gemessen. Darüber hinaus wird der reale Kapitalbestand im Unternehmenssektor ohne Wohnungsvermietung herangezogen. Er wird mit dem Auslastungsgrad des ifo-Instituts multipliziert.

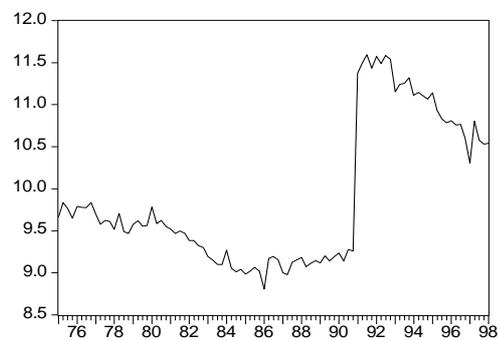
Der Untersuchung erfolgt mit saisonbereinigten Quartalsdaten, wobei eine Bereinigung entsprechend dem multiplikativen Census X11- Verfahren vorgenommen wird. Der Kapitalstock wird nur auf einer jährlichen Basis nachgewiesen. Daher wird sein jährlicher Zuwachs vorab nach Maßgabe der Saison der Bruttoinvestitionen der Unternehmen auf die einzelnen Quartale verteilt. Mit Ausnahme des Auslastungsgrades, der vom ifo-Institut berichtet wird, stammen alle Angaben aus der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung des Statistischen Bundesamtes. Die Analyse erstreckt sich auf die Periode von 1975.1 bis 1998.1, die 93 Datenpunkte umfaßt. Bis einschließlich 1990 werden westdeutsche, danach gesamtdeutsche Größen verwendet. Der Entwicklung der Variablen im Beobachtungszeitraum ist in Abbildung 1 dargestellt.

Abbildung 1:  
Entwicklung der Variablen im Beobachtungszeitraum

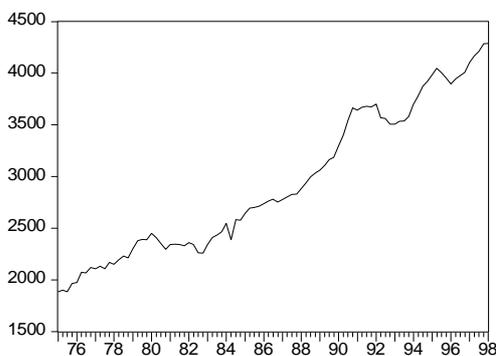
*Bruttowertschöpfung in Mrd. DM*



*Arbeitsvolumen in Mrd. Stunden*



*Ausgelasteter Kapitalstock in Mrd. DM*



Sämtliche verwendeten Variablen zeigen einen langfristig trendmäßigen Verlauf. Ihre Entwicklung kann von deterministischen und stochastischen Trends bestimmt sein, die im Rahmen von Einheitswurzeltests aufzudecken sind. Gemeinsame Trends können sodann mit Kointegrationsanalysen untersucht werden. Diese werden hier auf der Basis von Einzelgleichungen durchgeführt.

Die Analyse muß allerdings den Sprung in den Reihen berücksichtigen, der sich infolge der Deutschen Einheit ergibt. Tatsächlich sind die üblichen Integrations- und Kointegrationstests nicht mehr ohne weiteres anwendbar, wenn ein Strukturbruch präsent ist. Denn die Verfahren sind mit erheblichen Fehlern 2. Art verbunden, so daß die Hypothesen der Nichtstationarität beziehungsweise fehlender Kointegration fälschlicherweise zu oft beibehalten werden (Gregory, Nason, Watt, 1996).

Der Zeitpunkt des Strukturbruchs ist aufgrund des Wechsels der Datenbasis im Jahr 1991 exogen bekannt. Damit können die Einheitswurzeln in den einbezogenen Reihen mit der Methode von Perron (1989) beurteilt werden. Bei dem Verfahren läßt sich der Strukturbruch auf alternative Weise thematisieren. Beispielsweise läßt sich die Nullhypothese eines Random Walk mit einer einmaligen Niveauverschiebung und einem dauerhaften Sprung im Driftparameter überprüfen. In diesem Fall besteht die Alternative in einem trendstationären Prozeß, der eine permanente Änderung sowohl im Absolutglied als auch im Steigungsparameter aufweisen kann.

Generell macht das Verfahren den ADF-Test auch im Fall eines Strukturbruchs anwendbar. Der Strukturbruch kann sich im deterministischen Teil der untersuchten Reihe in unterschiedlicher Weise niederschlagen. Dies wird technisch durch die Einbeziehung verschieden konstruierter Dummyvariablen erreicht. Sofern die Residuen in dieser erweiterten ADF-Gleichung nicht den Eigenschaften eines White-Noise Prozesses genügen, werden verzögert endogene Terme mit einbezogen. Die kritischen Werte des Tests hängen neben der konkreten Testanordnung vom Anteil der Beobachtungen ab, die vor dem Strukturbruch liegen.

Ist die Anzahl der Einheitswurzeln in den einzelnen Reihen bekannt, besteht der nächste Schritt darin, auf Kointegration zwischen den Variablen zu testen. Die Kointegrationsanalyse erfolgt hier zunächst auf der Basis des Engle-Granger Verfahrens (1987), nach dem die langfristig geltende Relation superkonsistent mit der OLS-Methode geschätzt werden kann. Allerdings muß die Regression mögliche Strukturbrüche beachten. Tatsächlich erfolgt die Schätzung der langfristig geltenden Beziehung, indem zusätzlich spezielle Dummyvariablen einbezogen werden (Gregory, Hansen, 1996a, b). Diese können Änderungen im Absolutglied und Steigungsparameter eines deterministischen Trends in der Kointegrationsbeziehung oder Änderungen im Einflußparameter exogener Variablen abbilden. In der so erweiterten Regression werden wie bisher die Residuen ermittelt und

der ADF-Test auf Kointegration durchgeführt. Allerdings sind nicht mehr die kritischen Werte von MacKinnon (1991) relevant. Angesichts eines möglichen Strukturbruchs gilt ein anderer Ablehnbereich, der bei Gregory und Hansen (1996a, b) durch Monte-Carlo-Simulation nachgewiesen wird.

Sofern die Nullhypothese widerlegbar ist, sind die Residuen der statischen Regression stationär und die dort einbezogenen Variablen kointegriert. Dabei kann sich die Kointegrationsbeziehung durchaus infolge des Strukturbruchs verschoben haben. Tatsächlich wird in der um Dummyvariablen erweiterten ADF-Regression nicht auf die Präsenz eines Strukturbruchs, sondern allein auf Kointegration getestet.

Die Analyse eines langfristigen Zusammenhangs auf der Basis des ADF-Tests ist jedoch nicht unproblematisch. So sind z.B. in endlichen Stichproben große Verzerrungen zu erwarten, wenn die Rechthandvariablen der statischen Regression nicht als exogen vorausgesetzt werden können (Banerjee, Dolado, Hendry, Smith, 1986). Daher wird außerdem das Stock-Verfahren (Stock, 1987) eingesetzt, welches die langfristig geltende Relation gemeinsam mit der kurzfristigen Dynamik innerhalb eines Fehlerkorrekturmodells schätzt. Ein möglicher Strukturbruch kann hier Verschiebungen im deterministischen Teil der Kointegrationsbeziehung bewirken. Dies wird berücksichtigt, indem spezielle Dummyvariablen aufgenommen werden.

## **5 Empirische Ergebnisse**

Am Beginn der Analyse steht die Prüfung des Integrationsgrades für jede der involvierten Größen. Dabei wird das Verfahren von Perron (1989) angewendet, welches auch bei Strukturbruch eine Entscheidung zwischen differenzstationärem und trendstationärem Verhalten einer Variablen erlaubt. Der Einheitswurzeltest wird im Rahmen von drei Modellen durchgeführt, die sich hinsichtlich der potentiellen Wirkungen des Strukturbruchs auf den deterministischen Teil der Reihen unterscheiden. In Modell A (Crash Model) wird die Nullhypothese eines Random Walk mit einer möglichen einmaligen Verschiebung im Niveauverlauf gegen die Alternative eines trendstationären Prozesses getestet, dessen Absolutglied sich infolge des Strukturbruchs dauerhaft geändert haben mag. Die Variante B (Changing Growth Model) enthält in der Nullhypothese einen Random Walk mit einer permanenten Änderung im Driftparameter. Der trendstationäre Prozess der Alternative ist in diesem Fall mit einer dauerhafte Änderung im Steigungsparameter kompatibel. Schließlich entsteht Modell C aus der Kombination der Strukturen A und B. Die kritischen Werte des Tests sind abhängig vom unterstellten Modell und vom Anteil der Beobachtungen, die vor dem Strukturbruch liegen. Der Zeitpunkt des Strukturbruchs ist a priori bekannt und ergibt sich hier aufgrund des Wechsels der Datenbasis ab dem ersten Quartal 1991.

Die Tabelle 1 enthält die Resultate des Einheitswurzeltests für die logarithmierten Variablen. Zum Vergleich werden auch die Ergebnisse dargestellt, die sich auf der Grundlage westdeutscher Daten im verkürzten Beobachtungszeitraum bis 1990 ergeben. Da sich die Strukturbruchproblematik hier in geringerem Ausmaß zeigt, wird der originäre ADF-Test mit der Alternative eines trendstationären Prozesses berichtet.

Tabelle 1:  
Prüfung des Integrationsgrades

	Perron			ADF
Beobachtungszeitraum	1975.1-1998.4			1975.1-1990.4
	Modell A	Modell B	Modell C	
Bruttowertschöpfung	-1.63	-1.75	-1.52	-1.05
Kapitalstock	-2.00	-2.87	-2.01	-0.80
Arbeitsvolumen	-1.24	-1.36	-0.91	-0.26

Anmerkung:

Die Einheitswurzeltests werden einheitlich mit vier Verzögerungen der endogenen Variablen durchgeführt. Beim Perron-Test ist der Anteil der Beobachtungen vor dem Strukturbruch in 1991.1 ungefähr gleich 0.7. Die kritischen Werte werden bei Perron (1989) nachgewiesen. Bei den Modellen A und C wird statt der Schätzprozedur aus Perron (1989) das revidierte Verfahren von Perron und Vogelsang (1993) verwendet. Die kritischen Werte auf dem 0.05-Niveau sind gleich  $-3.80$  (Modell A),  $-3.89$  (Modell B) und  $-4.18$  (Modell C).

Die Variablen zeigen sowohl im westdeutschen wie auch im gesamtdeutschen Zeitraum ein nichtstationäres Verhalten. Der datenerzeugende Prozeß enthält stets eine Random-Walk Komponente. Dagegen zeigt sich keine Evidenz für die Annahme eines trendstationären Verlaufs der Variablen. Dies gilt insbesondere auch dann, wenn ein Bruch im deterministischen Trend zugelassen wird.

Im folgenden wird daher überprüft, ob zwischen den logarithmierten Variablen eine Kointegrationsbeziehung besteht, die ökonomisch im Sinne der Cobb-Douglas-Funktion interpretierbar ist. Dazu werden zunächst residuenbasierte Testverfahren entsprechend der Vorgehensweise von Engle und Granger (1987) eingesetzt, welche allerdings einen Strukturbruch berücksichtigen können (Gregory, Hansen, 1996a, b). Konkret läßt sich die statische Regression des langfristigen Zusammenhangs (7) um alternative Varianten des Strukturbruchs erweitern. In Modell A (Level Shift) wird lediglich eine Verschiebung im Absolutglied der Kointegrationsbeziehung zugelassen. Modell B (Level Shift with Trend) berücksichtigt zusätzlich einen linearen Trend in der Kointegrationsbeziehung, dessen Steigungsparameter konstant ist. Danach wäre die langfristige Relation trendstationär. Ein

Sprung im Absolutglied und in den Parametern der Kointegrationsbeziehung wird im Rahmen des Modells C (Regime Shift) thematisiert. Schließlich erlaubt Modell D (Regime und Trend Shift) einen Strukturbruch im Absolutglied, im Steigungsparameter des linearen Trends sowie im stochastischen Teil der Kointegrationsbeziehung.

In der ersten Stufe wird die mutmaßliche Kointegrationsbeziehung für die unterschiedlichen Spezifikationen geschätzt. Anschließend werden auf der zweiten Stufe die Residuen der Regressionen mit einem ADF-Test auf Stationarität überprüft. Die kritischen Werte sind von der Anzahl der stochastischen Regressoren bei der Schätzung des langfristigen Zusammenhangs und von der zugrunde liegenden Spezifikation des Strukturbruchs abhängig.

Tabelle 2:  
Prüfung auf Kointegration

	Modell A	Modell B	Modell C	Modell D
ADF	-2.11	-1.96	-1.99	-2.14

Anmerkung:

Die ADF-Tests auf Stationarität der Residuen werden einheitlich mit vier Verzögerungen der endogenen Variablen durchgeführt. Bei der Durchführung der Tests wird unterstellt, dass der Zeitpunkt des Strukturbruchs in 1991.1 gegeben ist. Der Ablehnbereich der Nullhypothese fehlender Kointegration wird bei Gregory und Hansen (1996a, b) berichtet. Auf dem 0.05-Niveau ergeben sich die kritischen Werte  $-4.92$  (Modell A),  $-5.29$  (Modell B),  $-5.50$  (Modell C) und  $-5.96$  (Modell D), wenn zwei stochastische Regressoren verwendet werden.

In allen Spezifikationen kann die Nullhypothese fehlender Kointegration nicht abgelehnt werden. Danach würde kein langfristig geltender Zusammenhang zwischen den Variablen existieren, so daß die Cobb-Douglas Funktion nach diesen Ergebnissen nicht gerechtfertigt werden kann.

Die fehlende empirische Evidenz mag durch eine Reihe von Ursachen hervorgerufen werden. So sind z.B. die Erklärungsvariablen in der Produktionsfunktion nicht exogen. Daher ist zu erwarten, daß eine statische Regression des langfristigen Zusammenhangs in endlichen Stichproben verzerrte Ergebnisse liefert (Banerjee, Dolado, Hendry, Smith, 1986). Desweiteren wird die kurzfristige Dynamik nicht berücksichtigt, die zwischen den involvierten Größen besteht. Sie wird durch die Schätzung der statischen Regression in eventuell unzulässiger Weise restringiert, so daß sich die Güte des Tests verschlechtert (Kremers, Ericsson, Dolado, 1992). Diese allgemeinen Defizite des Engle-Granger Ansatzes dürften entsprechend auch für die um einen möglichen Strukturbruch erweiterten Regressionen gelten.

Das Stock-Verfahren der Analyse eines Fehlerkorrekturmodells (Stock, 1987) ist dieser Kritik nicht ausgesetzt und liefert auch im Fall eines Strukturbruchs noch zufriedenstellende Ergebnisse (Campos, Ericsson, Hendry, 1996). Dabei wird die langfristig geltende Relation gemeinsam mit der kurzfristigen Dynamik geschätzt. Der t-Wert des Koeffizienten der endogenen Niveauvariablen gibt Auskunft über die Gültigkeit der Kointegrationsbeziehung. Im übrigen wird ein Bruch im deterministischen Teil der Kointegrationsbeziehung zugelassen. Die Ergebnisse der Schätzung sind in Tabelle 3 dargestellt.

Tabelle 3:

Fehlerkorrekturmodell für die Produktionsfunktion

Regressor	Koeffizient	t-Wert	Koeffizient	t-Wert
CON	0.28	1.41	0.57	4.18
DU	-0.04	-2.21	-0.02	-3.84
$\Delta(\text{BWS}(-4))$	0.09	1.55	0.12	2.24
$\Delta(\text{AVOL})$	0.61	7.95	0.55	14.41
$\Delta(\text{KAPI})$	0.28	6.35	0.28	6.29
BWS(-1)	-0.40	-4.53	-	-
AVOL(-1)	0.32	3.68	-	-
KAPI(-1)	0.18	3.46	-	-
ECM(-1)	-	-	-0.34	-4.15
TIME	0.00	3.18	0.00	4.09
DT	0.00	3.09	0.00	2.86

Anmerkung:

BWS = Bruttowertschöpfung, AVOL = geleistetes Arbeitsvolumen, KAPI = Kapitalstock. CON = Konstante, TIME = linearer Trend. Der Strukturbruch im deterministischen Teil wird durch die Variablen DU und DT spezifiziert, die vor 1991 gleich 0 und danach wie CON und TIME definiert sind. Für den Test auf Kointegration ist der t-Wert der verzögert endogenen Niveauvariablen relevant. Bei zwei stochastischen Regressoren und 100 Beobachtungen gilt auf dem 0.05-Niveau ein kritischer Wert von  $-3.98$  (Banerjee, Dolado, Mestre, 1998).

Eine Kointegrationsbeziehung zwischen Bruttowertschöpfung, Arbeitsvolumen und genutztem Kapitalstock existiert, wenn der Koeffizient der verzögerten Bruttowertschöpfung signifikant negativ ist. Aufgrund der Nichtstationarität der

Niveauvariablen ist jedoch nicht die übliche t-Statistik heranzuziehen. Statt dessen werden die kritischen Werte verwendet, die bei Banerjee, Dolado und Mestre (1998) nachgewiesen sind. Der hier berechnete t-Wert von  $-4.53$  überschreitet betragsmäßig den kritischen Wert von  $-3.98$ , so daß die Nullhypothese fehlender Kointegration im Rahmen des Fehlerkorrekturmodells verworfen wird.

Ob die gefundene Langfristbeziehung tatsächlich als Cobb-Douglas Produktionsfunktion zu interpretieren ist, läßt sich anhand des geschätzten Kointegrationsvektors beurteilen. Normiert man auf den Koeffizienten der Bruttowertschöpfung und ordnet die deterministischen Terme allein der Kointegrationsbeziehung zu, ergibt sich der Zusammenhang

$$(8) \log Y_t = -0.70 - 0.10 \cdot DU_t + 0.003 \cdot t + 0.002 \cdot DT_t + 0.78 \cdot \log L_t + 0.42 \cdot \log K_t,$$

der auf eine Cobb-Douglas Produktionsfunktion mit leicht steigenden Skalenerträgen deutet. Allerdings kann auch die Hypothese konstanter Skalenerträge nicht abgelehnt werden. Restrings man z.B. die Produktionselastizitäten im Kointegrationsvektor auf  $0.65$  für Arbeit und  $0.35$  für Kapital und berechnet damit den Fehlerkorrekturterm (ECM), bleiben die Ergebnisse im wesentlichen erhalten.

## 6 Fazit

Die Arbeit hat untersucht, ob und inwieweit die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion in gesamtdeutschen Zeitreihen gerechtfertigt werden kann. Die dabei durchgeführten Integrations- und Kointegrationstests lassen explizit einen Strukturbruch in den Datenreihen zu, der sich infolge der Deutschen Einheit ergibt.

Die Integrationstests von Perron (1989) signalisieren ein nichtstationäres Verhalten von Produktion, Arbeitsvolumen und Kapitalbestand, so daß eine Kointegrationsanalyse erforderlich wird. Die residuenbasierten Kointegrationstests von Gregory und Hansen (1996a, b) liefern allerdings keine Evidenz für eine langfristig geltende Beziehung zwischen den involvierten Größen. Dagegen zeigt die einstufige Schätzung eines Fehlerkorrekturmodells nach dem Stock-Verfahren (Stock, 1987), daß die einbezogenen Variablen kointegriert sind. Der Kointegrationsvektor entspricht dabei einer Technologie des Cobb-Douglas-Typs.

Insgesamt bieten die Resultate durchaus Hinweise auf das Vorliegen einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion in gesamtdeutschen Zeitreihen. Aufgrund der dargelegten ökonomischen Probleme sollten die Ergebnisse jedoch vorsichtig interpretiert werden.

## Literatur

- BANERJEE, A.; DOLADO, J. J.; HENDRY, D. F.; SMITH, G. W. (1986), Exploring Equilibrium Relationships in Economics through Static Models: Some Monte Carlo Evidence, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, Vol. 48, S. 253-278.
- BANERJEE, A.; DOLADO, J. J.; MESTRE, R. (1998), Error-Correction Mechanism Tests for Cointegration in a Single-Equation Framework, *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 19, S. 267-283.
- BARRO, R. J.; SALA-I-MARTIN, X. (1995), *Economic Growth*, New York.
- CAMPOS, J.; ERICSSON, N. R.; HENDRY, D. F. (1996), Cointegration Tests in the Presence of Structural Breaks, *Journal of Econometrics*, Vol. 70, S. 187-220.
- GREGORY, A. E.; HANSEN, B. E. (1996a), Residual-based tests for Cointegration in Models with Regime Shift, *Journal of Econometrics*, Vol. 70, S. 99-126.
- GREGORY, A. E.; HANSEN, B. E. (1996b), Tests for Cointegration in Models with Regime and Trend Shifts, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, Vol. 58, S. 555-560.
- GREGORY, A. E.; NASON, J. M.; WATT, D. (1996), Testing for Structural Breaks in Cointegrated Relationships, *Journal of Econometrics*, Vol. 71, S. 321-342.
- INTRILIGATOR, M. D., BODKIN, R. G., HSIAO, C. (1995), *Econometric Methods, Techniques and Applications*, New York.
- KREMERS, J. J. M.; ERICSSON, N. R.; DOLADO, J. J. (1992), The Power of Cointegration Tests, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, Vol. 54, S. 325-348.
- MACKINNON, J.G. (1991), Critical Values for Cointegration Tests, in Engle, R. F., Granger, C. W. J. (eds), *Long-run Economic Relationships: Readings in Cointegration*, Oxford, *Oxford Press*, S. 267-276.
- PERRON, P. (1989), The Great Crash, the Oil Price Shock, and the Unit Root Hypothesis, *Econometrica*, Vol. 57, S. 1361-1401.
- PERRON, P.; VOGELSANG, T. J. (1993), The Great Crash, the Oil Price Shock, and the Unit Root Hypothesis: Erratum, *Econometrica*, Vol. 61, S. 248-249.
- ROMER, P. (1990), Endogenous Technological Change, *Journal of Political Economy*, Vol. 98, 1990, S. 71-102.

STOCK, J. H. (1987), Asymptotic Properties of Least Squares Estimators of Cointegrating Vectors, *Econometrica*, Vol. 55, S. 1035-1056.

VARIAN, H. R. (1997), *Intermediate Microeconomics*, 4<sup>th</sup> ed., New York.

Herausgeber:

**INSTITUT FÜR WIRTSCHAFTSFORSCHUNG HALLE (IWH)**

Postanschrift: Postfach 11 03 61, 06017 Halle (Saale)

Hausanschrift: Kleine Märkerstraße 8, 06108 Halle (Saale)

Telefon: (03 45) 77 53-60

Telefax: (03 45) 77 53-8 20

Internet: <http://www.iwh-halle.de>